

**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №41 имени В.В.Сизова»
города Курска**

ИТОГОВЫЙ ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ

**Тема:
«Фракталы»**

**Выполнила:
Брянцева Алина Андреевна,
ученица 11 класса А**

**Куратор проекта:
Маркова Наталья Алексеевна,
учитель математики**

Допуск к защите: _____

Подпись куратора: _____

Курск, 2024г.

Оглавление

Введение	3
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АВТОПОДОБНЫХ ФИГУР	5
1.1 История возникновения	5
1.2 Классификация автоподобных фигур (фракталов)	8
Геометрические фракталы	8
Алгебраические фракталы	10
Стохастические фракталы	11
1.3 Применение автоподобных фигур (фракталов)	11
Заключение	15
Список использованных источников и литературы	16
Приложение 1	17
Приложение 2	24

Введение

«Я думаю, что никогда до настоящего времени
мы не жили в такой геометрический период.
Все вокруг – геометрия»
(Ле Корбюзье)

Геометрия – одна из самых древних наук, в переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» – земля, а «метрео» – мерить). Геометрия возникла на основе практической деятельности людей, а в дальнейшем сформировалась как самостоятельная наука. Геометрия – наука, занимающаяся изучением геометрических фигур. Самые первые геометрические сведения мы получаем на уроках математики уже в начальной школе, а начиная с седьмого класса, на уроках геометрии расширяем и углубляем геометрические знания.

Большинству людей кажется, что геометрия в природе ограничивается такими простыми фигурами, как линия, круг, многоугольник, сфера и т.д. Но многие природные системы настолько сложны, что использование только знакомых объектов обычной геометрии для их моделирования представляется безнадежным. Как, к примеру, построить модель горного хребта или кроны дерева в терминах геометрии? Как описать то многообразие биологических разнообразий, которое мы наблюдаем в мире растений и животных? Как представить всю сложность системы кровообращения, состоящей из множества капилляров и сосудов и доставляющей кровь к каждой клеточке человеческого тела? Представить строение легких и почек, напоминающие по структуре дерева с ветвистой кроной?

Автоподобные фигуры - подходящие средства для исследования поставленных вопросов. Нередко то, что мы видим в природе, интригует нас бесконечным повторением одного и того же узора, увеличенного или уменьшенного в несколько раз. Например, у дерева есть ветви. На этих ветвях есть ветки поменьше и т.д. Теоретически, элемент «разветвление» повторяется бесконечно много раз, становясь все меньше и меньше. То же самое можно заметить, разглядывая фотографию горного рельефа. Попробуйте немного приблизить изображение горной гряды - вы снова увидите горы. Так проявляется характерное для фракталов свойство самоподобия.

Тема проекта: «Фракталы»

Актуальность. Данная тема является актуальной, поскольку в современной математике развивается новый раздел-фрактальная геометрия. Фракталы заняли важное место не только в математике, но и в физике, биологии, технике, искусстве, а необычные рисунки, выполненные с помощью компьютерной графики, завораживают людей даже очень далеких от науки. Обнаруживается самоподобие и в природе (молния, снежинки, кораллы, фрагменты растений, кровеносная система человека и т. д.).

Цель работы – познакомиться с новым направлением в математике – фрактальной геометрией, рассмотреть виды самоподобных фигур, их свойства, области применения и исследовать возможность построения фракталов на языке программирования Python.

Исходя из поставленной цели исследования, необходимо решить следующие **задачи**:

1. Познакомиться с историей возникновения и развития фрактальной геометрии.
2. Рассмотреть классификацию самоподобных фигур (фракталов).
3. Раскрыть применение самоподобных фигур (фракталов).
4. Более подробно изучить язык программирования Python.
5. Написать код на Python для построения фракталов.

Тип проекта: исследовательский.

Гипотеза: окружающая нас действительность состоит из фрактальной структуры.

Объект исследования – фракталы.

Предмет исследования – самоподобные фигуры в математике и в реальном мире.

Методы исследования: сравнительный анализ, синтез, моделирование.

План работы.

1. Изучение имеющейся литературы (октябрь 2023г)
2. Поиск актуальной информации (ноябрь 2023г)
3. Написание кода на Python для построения фракталов (декабрь 2023г)
4. Оформление работы (январь -февраль 2024г)
5. Защита проекта с демонстрацией презентации (апрель 2024г)

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АВТОПОДОБНЫХ ФИГУР

1.1 История возникновения

Почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в её неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака - это не сферы, горы - это не конусы, линии берега – это не окружности¹...

Первые идеи фрактальной геометрии возникли в XIX веке. Георг Кантор с помощью простой рекурсивной (повторяющейся) процедуры превратил линию в набор несвязанных точек (так называемая Пыль Кантора). Он брал линию и удалял центральную треть и после этого повторял то же самое с оставшимися отрезками (рисунок 1).

Пример кривой, имеющей фрактальный характер, был получен Д. Пеано (1858-1932) и называется кривой Пеано. Для её построения разобьём данный квадрат на четыре равных квадрата меньшего размера и соединим их центры отрезками, как показано на рисунке. Повторяя описанную процедуру, можно получить более сложные ломаные, приближающиеся к кривой Пеано. Ломаные, участвующие в построении кривой Пеано, на каждом этапе проходят через все квадраты, а сами квадраты уменьшаются, стягиваясь к точкам исходного квадрата. Кривая Пеано имеет бесконечную длину (рисунок 2).

Кривая Пеано и пыль Кантора выходили за рамки обычных геометрических объектов. Они не имели чёткой размерности. Пыль Кантора строилась вроде бы на основании одномерной прямой, но состояла из точек. А кривая Пеано строилась на основании одномерной линии, а в результате получалась плоскость.

Вплоть до XX века шло накопление данных о таких странных объектах, без какой-либо попытки их систематизировать. Так было, пока за них не взялся Бенуа Мандельброт - отец современной фрактальной геометрии и слова «фрактал». Постепенно сопоставив факты, он пришёл к открытию нового направления в математике - фрактальной геометрии.

Что же такое фрактал? Сам Мандельброт вывел слово fractal от латинского слова fractus, что означает разбитый (поделенный на части).

И одно из определений фрактала, это геометрическая фигура, состоящая из частей, и которая может быть поделена на части, каждая из которых будет представлять уменьшенную копию целого (по крайней мере, приблизительно).

Понятие фракталов ворвалось в сознание математиков, других учёных и даже людей, не связанных с наукой, в 1977 году, когда была опубликована основополагающая книга Мандельброта «Фрактальная геометрия природы».

¹ Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: «Институт компьютерных исследований», 2002г. С. 13

Понятия фрактал и фрактальная геометрия, появившиеся в конце 70-х, с середины 80-х гг. XX в., прочно вошли в обиход современных математиков и программистов:

Фрактал — термин, означающий геометрическую фигуру, обладающую свойством самоподобия, то есть составленную из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком.

Есть и другие определения фракталов:

Фрактал (от латинского «fractus» - разбитый, дробленный, сломанный) представляет собой сложную геометрическую фигуру, которая составлена из нескольких бесконечной последовательности частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком, и повторяется при уменьшении масштаба.

Фрактал — это бесконечно самоподобная геометрическая фигура, каждый фрагмент которой повторяется при уменьшении масштаба.

Фрактал — самоподобное множество нецелой размерности.

С математической точки зрения, фрактал — это, прежде всего, множество с дробной размерностью. В геометрии Евклида точка имеет размерность 0, отрезок и окружность - размерность 1, круг и сфера - размерность 2. Феликс Хаусдорф (1868-1942) в 1919 г. первым нашёл в математике множества с дробной размерностью (канторово множество, кривая Коха и др.). Это направление развивал Абрам Самойлович Безикович (1891-1970), размерность Хаусдорфа-Безиковича нашла применение в некоторых разделах математики, но громадный интерес к ней возник после публикации в 1975 году Бенуа Мандельбротом, в которой он привёл яркие примеры применения фракталов к объяснению некоторых природных явлений. Он выделил те математические множества и объекты, которые можно разбить на сколь угодно малые части, причём каждая часть окажется просто уменьшенной копией целого: если мы будем смотреть на фрактал в микроскоп, то увидим ту же самую картинку, что и без микроскопа. Успех фракталов связан с тем, что он воспользовался удобной количественной мерой неидеальности объектов - извилистости, морщинистости, трещиноватости, пористости объёма - размерностью Хаусдорфа-Безиковича. Многие объекты, построенные математиками, оказались фракталами, т. е. объектами с дробной, или фрактальной, размерностью Хаусдорфа - Безиковича. Все они очень красивы и часто носят поэтические названия: канторовская пыль, кривая Пеано, снежинка фон Коха, ковер Серпинского и т.д. И все они обладают одним очень важным свойством, которое роднит их с самой обыкновенной прямой. Это свойство называется самоподобием: все эти фигуры подобны любому своему фрагменту. Если вам дадут исходный снимок какого-то фрактального объекта, и снимок, его же, но увеличенный в какое-то число раз, то вы не сможете найти между ними какой-либо разницы. Самоподобие есть характеристическое свойство фрактала. Самоподобный объект выглядит неизменным и после увеличения, и после уменьшения его размеров.

Чтобы получить формулу расчета размерности фигуры, можно рассуждать следующим образом. Если взять линейный отрезок и разделить

его на $N = 3$ равные части, то длина каждого фрагмента будет в три раза меньше исходной длины. Пусть начальная длина, условно равна 1, тогда длины фрагментов будут равны $r = 1/3$. Очевидно, что общая длина отрезка, равна: $N r = 1$.

Проделаем ту же операцию с квадратом. Каждую из его сторон длиной в одну единицу также разделим на три равные части. То есть, линейные размеры маленьких квадратов будут равны $r = 1/3$. И таких квадратов всего $N = 9$. В этом случае площадь большого квадрата будет равна: $N r^2 = 1$

Как вы уже догадались, если взять куб и каждую из его сторон также разбить на три равных отрезка, то получим $N = 27$ кубиков со сторонами $r = 1/3$. Тогда объем куба можно выразить формулой: $N r^3 = 1$

То есть, размерность фигуры проявляется как степень коэффициента подобия r . И в общем случае можно записать: $D = \frac{\log N}{\log 1/r}$ ²

Фракталы — это прежде всего язык геометрии. Однако их главные элементы недоступны непосредственному наблюдению. В этом отношении они принципиально отличаются от привычных объектов евклидовой геометрии, таких как прямая линия или окружность. Фракталы выражаются не в первичных геометрических формах, а в алгоритмах, наборах математических процедур. Эти алгоритмы трансформируются в геометрические формы с помощью компьютера. Овладев языком фракталов, можно описать форму облака так же чётко и просто, как архитектор описывает здание с помощью чертежей, в которых применяется язык традиционной геометрии.

Язык — это очень подходящая метафора для концепции, лежащей в основе фрактальной геометрии. Буквы не несут в себе никакого смыслового значения до тех пор, пока они не соединены в слова. Точно так же евклидова геометрия состоит лишь из нескольких элементов (прямая, окружность и т.д.), из которых строятся сложные объекты, геометрически выражающие некий смысл.

Чтобы представить себе фрактал понаглядней рассмотрим пример, приведенный в книге Б. Мандельброта «The Fractal Geometry of Nature» («Фрактальная геометрия природы») ставший классическим — «Какова длина берега Британии?». Ответ на этот вопрос не так прост, как кажется. Все зависит от длины инструмента, которым мы будем пользоваться. Измерив берег с помощью километровой линейки, мы получим какую-то длину. Однако мы пропустим много небольших заливчиков и полуостровов, которые по размеру намного меньше нашей линейки. Уменьшив размер линейки до, скажем, 1 метра - мы учтем эти детали ландшафта, и, соответственно длина берега станет больше. Пойдем дальше и измерим длину берега с помощью миллиметровой линейки, мы тут учтем детали, которые больше миллиметра, длина будет еще больше.

² URL: <https://propoprogrs.ru/fractals/fractals-kak-vychislyetsya-fraktalnaya-razmernost-po-hausdorfu>

В итоге ответ на такой, казалось бы, простой вопрос может поставить в тупик кого угодно - длина берега Британии бесконечна³.

1.2 Классификация автоподобных фигур (фракталов)

В основном фракталы классифицируют по трём группам:

1. Геометрические фракталы.
2. Алгебраические фракталы.
3. Стохастические фракталы.

Геометрические фракталы.

Фракталы этого класса самые наглядные. Именно с них и начиналась история фракталов. Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений. В двухмерном случае их получают с помощью некоторой ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную - генератор, в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры, получается геометрический фрактал. Примерами геометрических фракталов могут служить:

1) **Кривая Коха.** Кривая Коха (рисунок 3) является типичным геометрическим фракталом. Процесс её построения выглядит следующим образом: берём единичный отрезок, разделяем на три части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины $1/3$. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырех получившихся звеньев и т. д.

Снежинку Коха (рисунок 4) можно построить на сторонах равностороннего треугольника. В равностороннем треугольнике каждая сторона делится на три равные части и на средних отрезках сторон строятся наружу равносторонние треугольники. Эту операцию повторяют бесконечное число раз для каждого из отрезков ломаной, получившегося на предыдущем шаге.

Основные свойства кривой Коха:

1. Она непрерывна, но нигде не дифференцируема.
2. Имеет бесконечную длину. Пусть длина исходного отрезка равна 1. На каждом шаге построения мы заменяем каждый из составляющих линию отрезков, на ломаную, которая в $4/3$ раза длиннее. Значит, и длина всей ломаной на каждом шаге умножается на $4/3$: длина линии с номером n равна $(4/3)^n$. Поэтому предельной линии ничего не остается, кроме как быть бесконечно длинной. Фрактальная размерность кривой Коха равна $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618....$

³ Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: «Институт компьютерных исследований», 2002г. С. 46

3. Снежинка Коха ограничивает конечную площадь.⁴

Вычислим **площадь звезды Коха**. Пусть площадь исходного равностороннего треугольника равна 1. На первом шаге добавляем три равносторонних треугольника, со сторонами в 3 раза меньшими исходных. Площадь каждого такого треугольника равна $1/9$. Следовательно, площадь правильного звездчатого шестиугольника равна $1+3/9=4/3$. На следующем шаге добавляется 12 треугольников суммарной площади $12/81$. Поскольку длины сторон треугольников на каждом шаге уменьшаются в 3 раза, их площадь уменьшается в 9 раз. Число добавляемых треугольников равно числу сторон многоугольника и на каждом шагу увеличивается в 4 раза.

$$S=b_1/1-q$$

Поэтому *площадь звезды Коха представляет собой площадь исходного треугольника плюс сумма геометрической прогрессии с начальным членом $3/9$ и знаменателем $4/9$.*

По формуле бесконечной геометрической прогрессии находим:

1. $S=3/9:(1-4/9)=3/9:5/9=3/9*9/5=3/5$
2. $S_{зв.Коха}=1+S=1+3/5=8/5$.

2) **Кривая Леви** — фрактал. Предложен французским математиком П. Леви. Получается, если взять половину квадрата, а затем каждую сторону заменить таким же фрагментом, и, повторяя эту операцию, в пределе получим кривую Леви.

3) **Кривая Минковского** (рисунок 5) — классический геометрический фрактал, предложенный Минковским. Инициатором является отрезок, а генератором является ломаная из восьми звеньев (два равных звена продолжают друг друга). Кривая Минковского нигде не дифференцируема и не спрямляема, не имеет самопересечений, имеет Хаусдорфову размерность $D=\ln 8/\ln 4=3/2=1,5$ (поскольку она состоит из восьми равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия $1/4$).

4) приведем пример кривой Пеано, для которой область, которую она заполняет на плоскости, имеет весьма причудливую форму. Это так называемый **дракон Хартера-Хейтуэя** (рисунок 6). Для его построения возьмем отрезок. Повернем его на 90° вокруг одной из вершин и добавим полученный отрезок к исходному. Получим угол из двух отрезков. Повторим описанную процедуру. Повернем угол на 90° вокруг вершины и добавим полученную ломаную к исходной. Повторяя описанную процедуру и уменьшая ломаные, будем получать все более сложные ломаные, напоминающие дракона. Хаусдорфова размерность фрактала «дракон Хартера-Хейтуэя» равна

$$D = \frac{\log 2}{\log 1/\sqrt{5}} \approx 2.$$

То есть, при числе итераций стремящихся к бесконечности, дракон покрывает собой все двумерное пространство. На самом деле — это один из

⁴ <https://elementy.ru/posters/fractals/Koch>

примеров кривой Пеано, которая будучи одномерной, способна обходить все точки на плоскости. И размерность Хаусдорфа это подтверждает.

5) **Дерево Пифагора** (рисунок 7) — разновидность фрактала, основанная на фигуре, известной как «Пифагоровы штаны». Пифагор, доказывая свою знаменитую теорему, построил фигуру, где на сторонах прямоугольного треугольника расположены квадраты. Впервые дерево Пифагора построил А. Е. Босман (1891-1961) во время Второй мировой войны, используя обычную чертёжную линейку.

6) **Треугольник Серпинского** (рисунок 8) — фрактал, один из двумерных аналогов множества Кантора, предложенный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году. Также известен как «решётка» или «салфетка» Серпинского. Имеет Хаусдорфову размерность $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,5849[4]$.

Также ещё одним несложным представителем геометрического фрактала является **квадрат (ковёр) Серпинского**. Строится он довольно-таки просто: квадрат делится прямыми, параллельными его сторонам, на 9 равных квадратов. Из квадрата удаляется центральный квадрат. Получается множество, состоящее из 8 оставшихся квадратов «первого ранга». Поступая точно так же с каждым из квадратов первого ранга, получим множество, состоящее из 64 квадратов второго ранга. Продолжая этот процесс бесконечно, получим бесконечную последовательность или квадрат Серпинского. Имеет Хаусдорфову размерность $\ln 8 / \ln 3 = 1,8928$. Так как фрактальная размерность у «ковра» Серпинского больше, чем у «салфетки», то «ковёр» является менее «дырявой» фрактальной фигурой, чем «салфетка».

Алгебраические фракталы.

Это самая крупная группа фракталов. Они оправдывают своё название, так как строятся на основе алгебраических формул, иногда довольно простых. Один из методов представляет собой многократный (итерационный) расчет функции $Z_{n+1} = f(Z_n)$, где Z – комплексное число, а f некая функция. Расчет данной функции продолжается до выполнения определенного условия. И когда это условие выполнится – на экран выводится точка. При этом значения функции для разных точек комплексной плоскости может иметь разное поведение:

- с течением времени стремится к бесконечности.
- стремится к 0
- принимает несколько фиксированных значений и не выходит за их пределы.
- поведение хаотично, без каких-либо тенденций.

К ним можно отнести **фрактал Мандельброта** (рисунок 9), **фрактал Ньютона** (рисунок 10), множество Жюлиа и многие другие⁵.

Интересный факт, некоторые алгебраические фракталы поразительным образом напоминают изображения животных растений и других биологических объектов, вследствие чего получили название биморфов.

⁵ Бекман, И.Н. Геометрия фракталов. Курс лекций. – М.: МГУ, 2010г, с10-12

Стохастические фракталы.

Третьей крупной разновидностью фракталов являются стохастические фракталы, которые образуются путем многократных повторений случайных изменений каких-либо параметров. Термин «стохастичность» происходит от греческого слова, обозначающего «предположение».

В результате итерационного процесса получают объекты очень похожие на природные фракталы — несимметричные деревья, изрезанные лагунами береговые линии островов и многое другое. Двумерные стохастические фракталы используются преимущественно при моделировании рельефа местности и поверхности моря. Эта группа фракталов получила широкое распространение благодаря работам Майкла Барнсли из технологического института штата Джорджия.

Он пытался кодировать изображения с помощью фракталов. Запатентовав несколько идей по кодированию изображений с помощью фракталов, он основал фирму «Iterated Systems», которая через некоторое время выпустила первый продукт «Images Incorporated», в котором можно было изображения переводить из растровой формы во фрактальную FIF. Это позволяло добиться высоких степеней сжатия. При низких степенях сжатия качество рисунков уступало качеству формата JPEG, но при высоких картинки получались более качественными.

Типичный представитель данного класса фракталов «Плазма» (рисунок 11).

Для ее построения возьмем прямоугольник и для каждого его угла определим цвет. Далее находим центральную точку прямоугольника и раскрашиваем ее в цвет равный среднему арифметическому цветов по углам прямоугольника плюс некоторое случайное число. Чем больше случайное число - тем более «рваным» будет рисунок. Если мы теперь скажем, что цвет точки - есть высота над уровнем моря - получим вместо плазмы - горный массив. Именно на этом принципе моделируются горы в большинстве программ. С помощью алгоритма, похожего на плазму строится карта высот, к ней применяются различные фильтры, накладываем текстуру и пожалуйста, фотореалистичные горы готовы.

1.3 Применение автоподобных фигур (фракталов)

Фракталы находят все большее и большее применение в науке. Основная причина этого заключается в том, что они описывают реальный мир иногда даже лучше, чем традиционная физика или математика. Вот несколько примеров.

Одни из наиболее мощных приложений фракталов лежат в *компьютерной графике*. Это фрактальное сжатие изображений.

В *механике и физике* фракталы используются благодаря уникальному свойству повторять очертания многих объектов природы. Фракталы позволяют приближать деревья, горные поверхности и трещины с более высокой точностью. Также фрактальную геометрию используют для

проектирования антенных устройств. Впервые это было применено американским инженером Натаном Коэном, который жил тогда в центре Бостона, где была запрещена установка на зданиях внешних антенн.

Фракталы в естественных науках. В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и т.д. фракталы применяются для моделирования пористых материалов, например, в нефтехимии. Изучение турбулентности в потоках очень хорошо подстраивается под фракталы. Турбулентные потоки хаотичны и поэтому их сложно точно смоделировать. И здесь помогает переход к фрактальному представлению, что сильно облегчает работу инженерам и физикам, позволяя им лучше понять динамику сложных потоков. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов. На данное время фракталы находят, и вероятно будут находить применение в медицине. Сам по себе человеческий организм состоит из множества фрактально подобных структур: кровеносная система, мышцы, бронхи и т.д.

Мало кто обращает внимание, но эти удивительные фигуры присутствуют повсюду. Природа создана из самоподобных фигур, просто мы этого не замечаем. Достаточно посмотреть через увеличительное стекло на нашу кожу или листок дерева, и мы увидим фракталы. Или взять, к примеру, ананас или даже хвост павлина – они состоят из подобных фигур. А сорт капусты брокколи Романеско вообще поражает своим видом, ведь это поистине можно назвать чудом природы. Даже на обычной снежинке мы можем увидеть все прелести фракталов.

Фракталы стали новым направлением **в искусстве**, демонстрируя собой настоящие шедевры - картины необычайной красоты и привлекательности. Выставки фрактальных изображений проходят в музеях всего мира, большое количество конкурсов проводится в компьютерной сети Интернет. И естественно, что они стали популярны в оформлении интерьеров.

Применение фрактальных правил построения широко распространено и **в архитектуре**.

Фрактальный принцип развития природных и геометрических объектов проникает вглубь архитектуры и как образ внешнего решения объекта, и как внутренний принцип архитектурного формообразования. Фрактальная архитектура делится на два типа: искусственно созданная и естественно сложившаяся.

Также фракталы используются **в дизайне мебели**.

Ни для кого не секрет, что японцы по жизни сильно ограничены в пространстве, в связи с чем, им приходится всячески изощряться в эффективном его использовании. **Такеши Миякава** показывает, как это можно делать одновременно эффективно и эстетично. Его фрактальный шкаф подтверждение тому, что использование фракталов в дизайне – это не

только дань моде, но и гармоничное конструкторское решение в условиях ограниченного пространства.

В литературе.

Среди литературных произведений находят такие, которые обладают фрактальной природой, т. е. вложенной структурой самоподобия:

«Вот дом.

Который построил Джек.

А вот пшеница.

Которая в тёмном чулане храница

В доме,

Который построил Джек

А вот весёлая птица-синица,

Которая ловко ворует пшеницу,

Которая в тёмном чулане храница

В доме,

Который построил Джек...».

Я попыталась сочинить фрактальное стихотворение, вот, что у меня получилось:

У слиянья двух рек: Кур и Тускарь

Город стоит на холмах.

А вот символ Курска — соловушка,

Малютка и сероголовушка.

Осмотрит окрестности кратко,

И песню споёт сладко- сладко.

У слиянья двух рек: Кур и Тускарь,

Где город стоит на холмах.

А вот сорок первая школа—

Нести кладезь знаний готова!

Здесь учатся умные дети,

Чтобы знать обо всём на свете.

Прилетит символ Курска — соловушка,

Малютка и сероголовушка.

Осмотрит окрестности кратко,

И песню споёт сладко- сладко.

У слиянья двух рек: Кур и Тускарь,

Где город стоит на холмах.

А вот и Алинка - проказница,

Затейница, одиннадцатиклассница.

Она любит сорок первую школу,

Что нести кладезь знаний готова,

Где учатся умные дети,

Чтобы знать обо всём на свете.
Прилетает туда наш соловушка,
Малютка и сероголовушка.
Осмотрит окрестности кратко,
И песню споёт сладко- сладко.
У слиянья двух рек: Кур и Тускарь,
Где город стоит на холмах.

Заключение

Данная работа является введением в мир автоподобных фигур (фракталов). В работе приведены далеко не все области человеческих знаний, где нашла свое применение теория фракталов.

Изучая фракталы, анализируя проявления фракталов в окружающей нас действительности, а также в научных открытиях, связанных с существованием фракталов, я обнаружила удивительно тесную связь математики с окружающим нас миром. Данная тема показалась мне уникальной и занимательной. Раньше я не имела представления о фракталах и не знала, что это такое, но, познакомившись с ними, поняла, что фрактал - нередкое явление в нашей жизни. Мы буквально окружены ими. Фракталы встречаются везде, и без их существования мир оказался бы скучным и простым. Они украшают нашу жизнь, задают форму предметам, заставляют остановиться и присмотреться к тому, что нас окружает. Даже человек далекий от математики с лёгкостью может заметить фрактал и поймет его красоту.

Я считаю, что цель и задачи, поставленные в начале работы, достигнуты. Процесс создания проекта не был для меня трудным. Я думаю, что у меня все получилось.

Практическая значимость данной работы заключается в следующем: изучив литературу по данному вопросу, я получила дополнительные знания в области математики, укрепив свой интерес к этой науке; мое исследование может быть полезно учащимся и педагогам; в перспективе мне было бы интересно более подробно изучить связь фракталов с информационными технологиями.

В будущем я планирую научиться строить алгебраические фракталы, когда более подробно изучу комплексные числа. Также хочу попробовать построить свои фрактальные изображения на языке программирования Паскаль с помощью циклов.

Список использованных источников и литературы

1. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: «Институт компьютерных исследований», 2002г.
2. Морозов, А. Д. Введение в теорию фракталов. – Н.Новгород: Изд-во Нижегородского Университета, 1999г.
3. Пайтген, Х. О., Рихтер, П. Х. Красота фракталов. – М.: «Мир», 1993г.
4. Терехов, С.В. Фракталы и физика подобия.-Донецк, Цифровая типография,2011г.
5. Бекман, И.Н. Геометрия фракталов. Курс лекций. – М.: МГУ, 2010г
file:///C:/Users/User/Downloads/BUM_fractal.pdf(дата обращения: 14.10.2023г.)
6. Понятие фрактала и история появления фрактальной графики.
<https://poznayka.org/s2036t1.html>(дата обращения: 05.11.2023г.)
7. Распределение Хаусдорфа мультифракталов
<file:///C:/Users/User/Downloads/59f33a885f1be71a499ba56c.pdf>(дата обращения: 12.11.2023г.)
8. Снежинка Коха. <https://elementy.ru/posters/fractals/Koch>(дата обращения: 15.10.2023г.)
9. Фрактал. Как вычисляется фрактальная размерность по Хаусдорфу.
<URL:https://proporprogs.ru/fractals/fractals-kak-vychislyaetsya-fraktalnaya-razmernost-po-hausdorfu> (дата обращения: 23.10.2023г.)
10. Фрактальная графика. <https://pandia.ru/text/80/142/48210.php> (дата обращения: 23.10.2023г.)

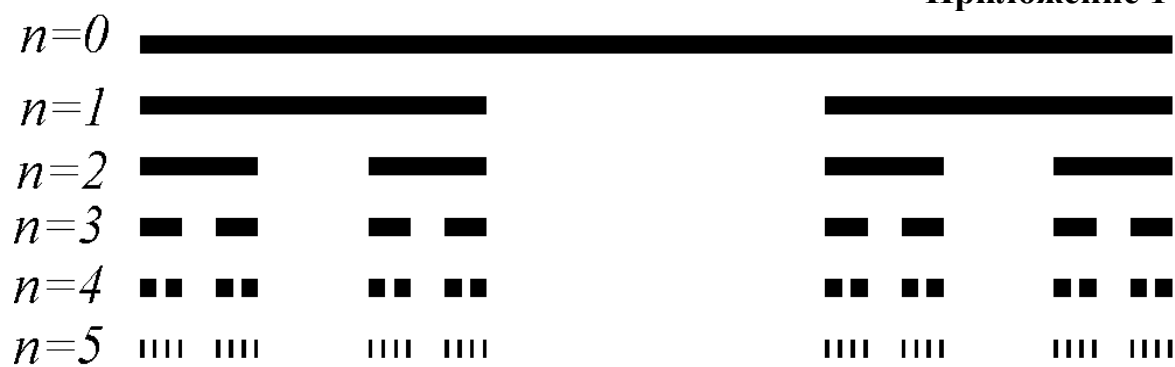


Рисунок 1 – Построение кривой Пеано

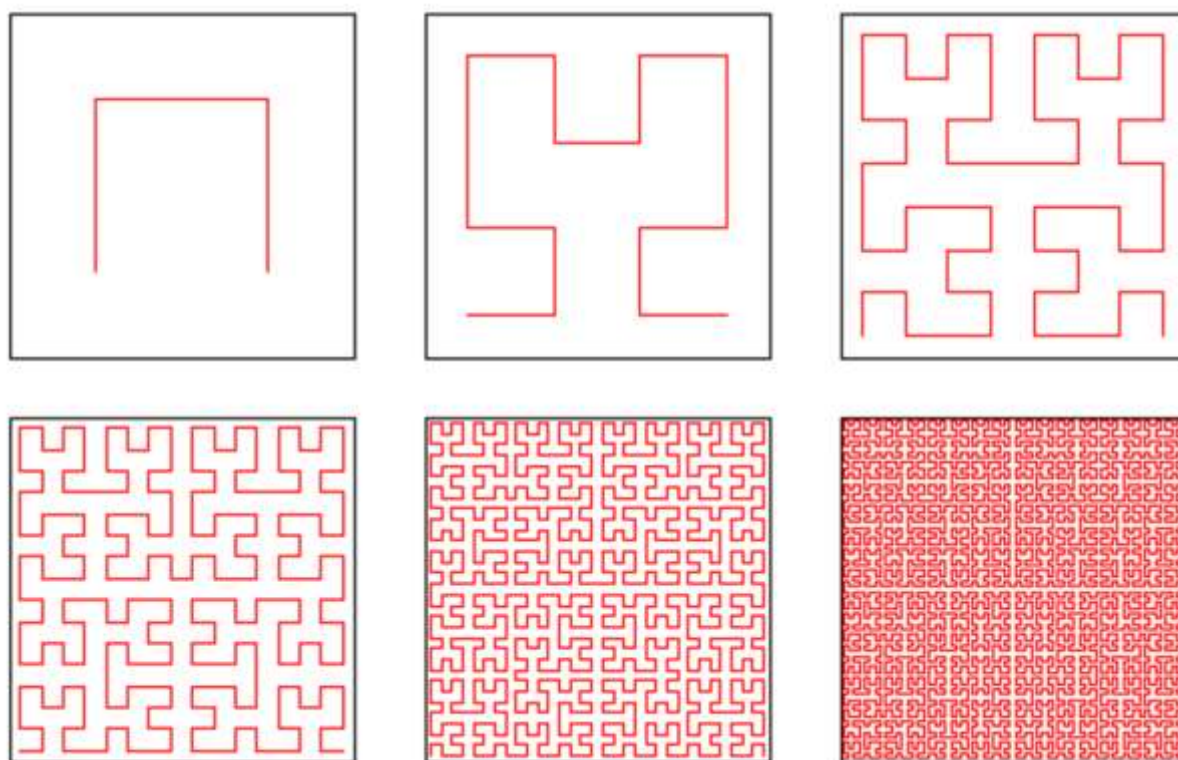


Рисунок 2 - Построение кривой Пеано

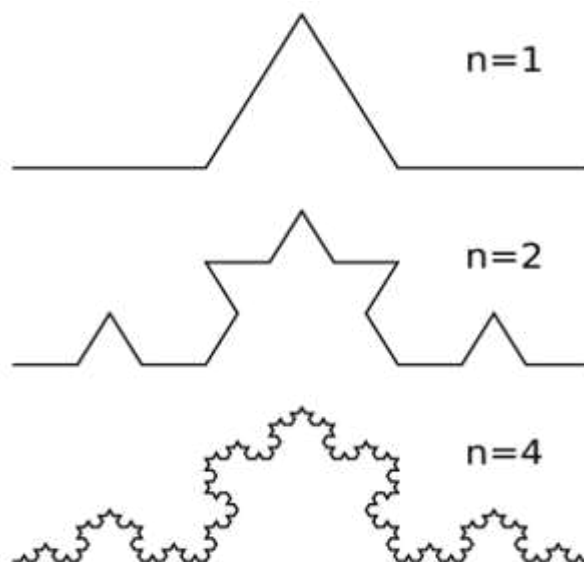


Рисунок 3 - Кривая Коха

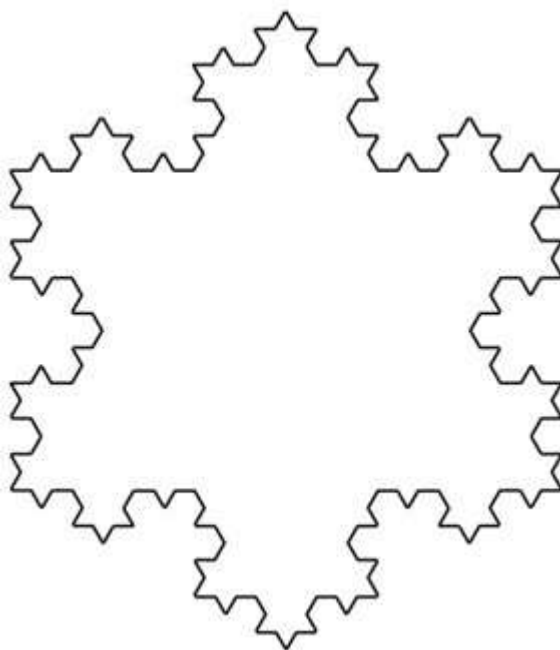


Рисунок 4 - Снежинка Коха

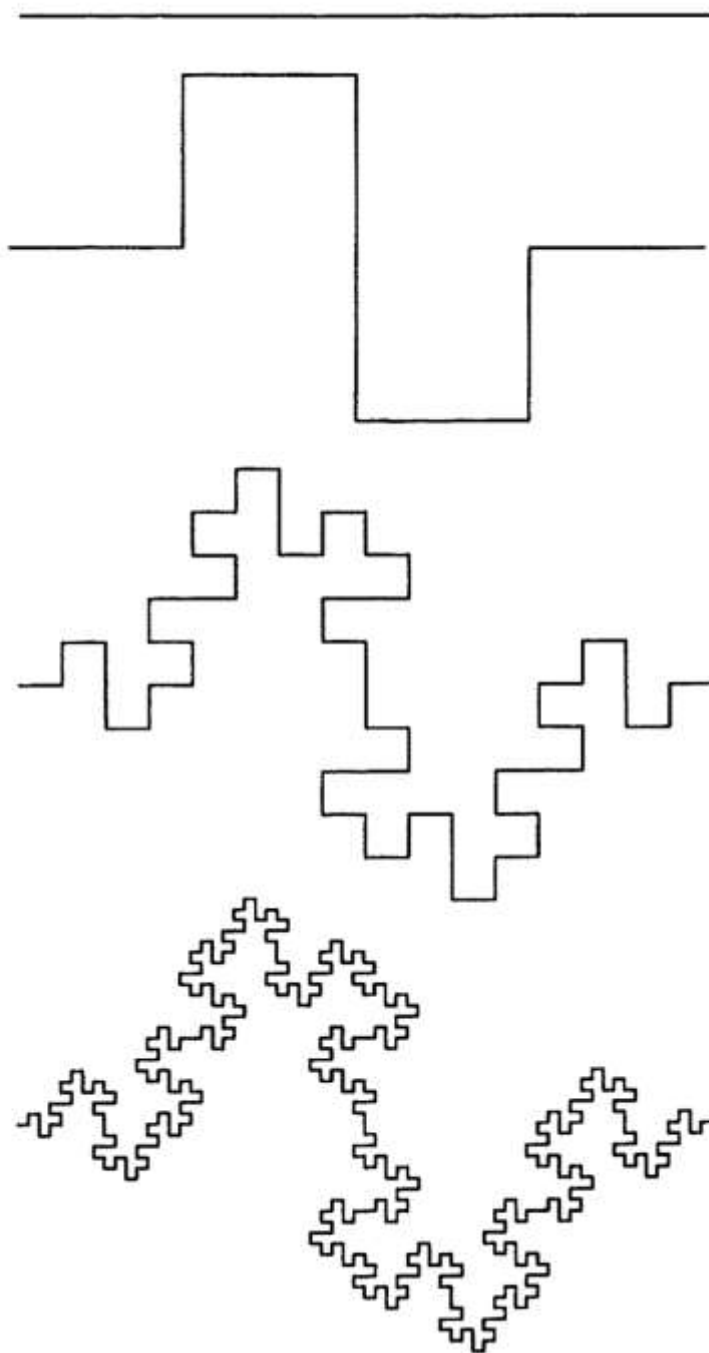


Рисунок 5- Кривая Минковского

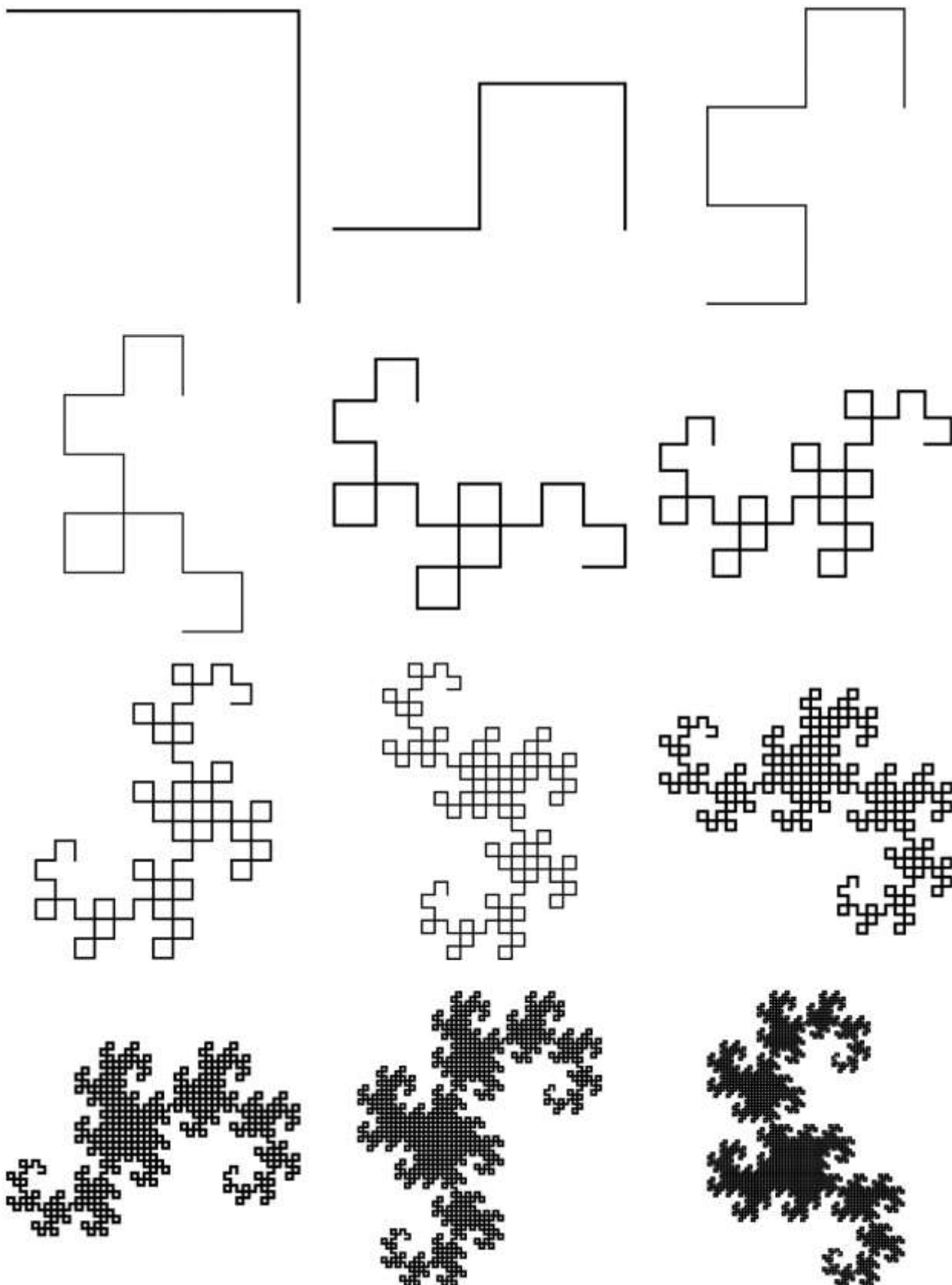


Рисунок 6 - Дракон

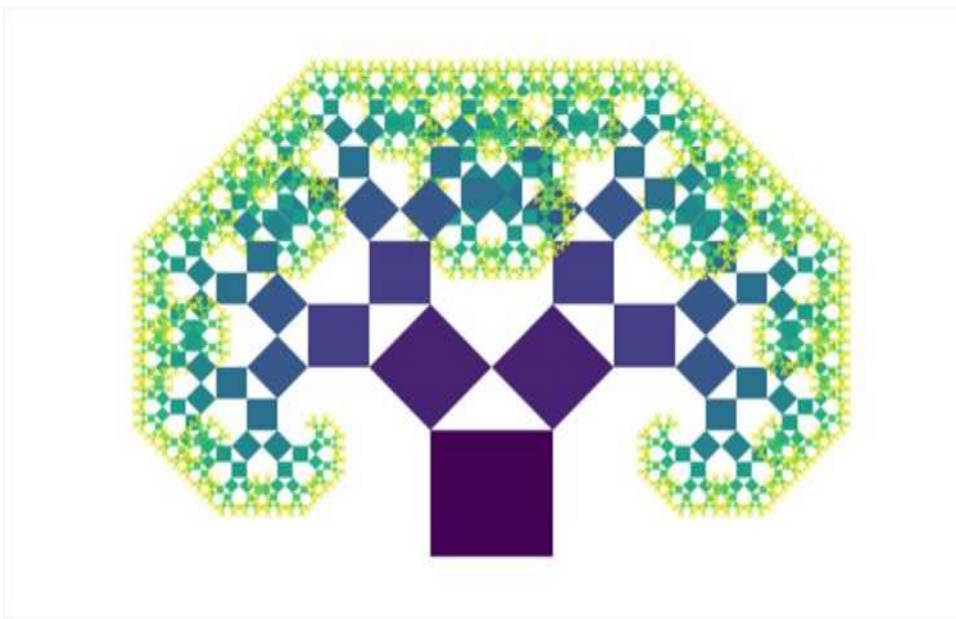


Рисунок 7- Дерево Пифагора



Рисунок 8 - Треугольник Серпинского

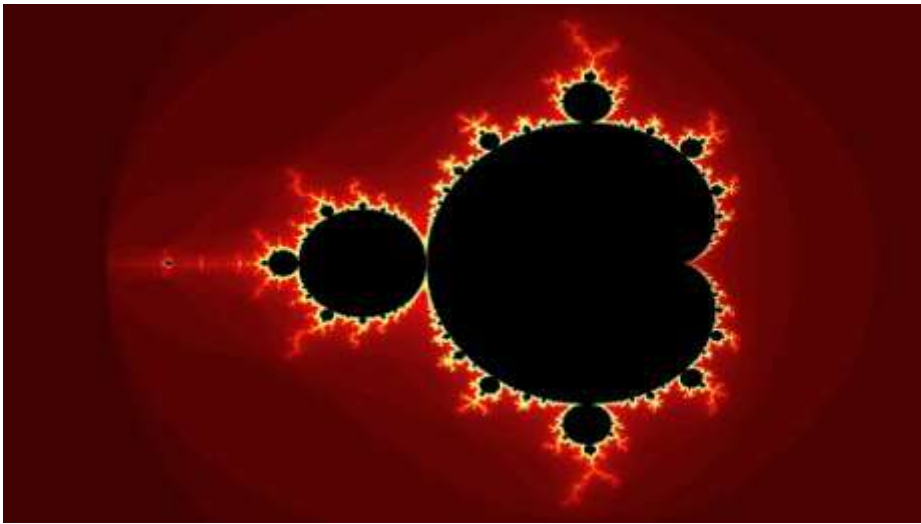


Рисунок 9 - Фрактал Мандельброта

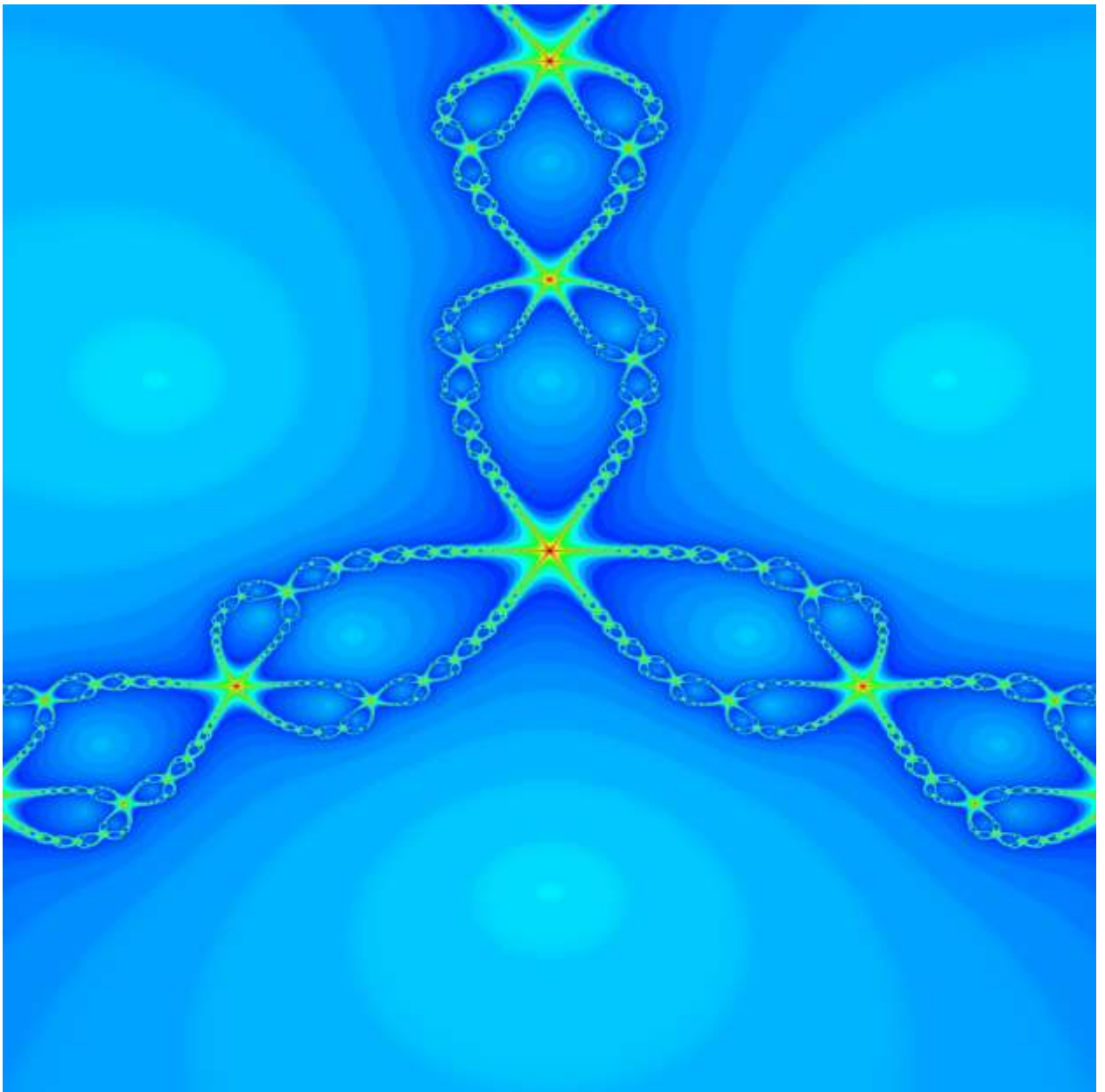


Рисунок 10 - Фрактал Ньютона

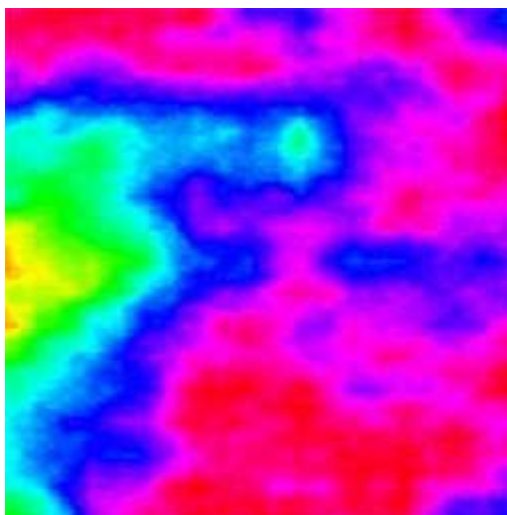


Рисунок 11- Плазма

Кривая Хартера-Хейтуэя с заданным порядком на питоне

```
import turtle
# Создание экземпляра черепахи
t = turtle.Turtle()
# Установка скорости черепахи
t.speed(0)
# Функция для рисования кривой Хартера-Хейтуэя
def dragon_curve(t, order, size, turn):
    if order == 0:
        t.forward(size)
    else:
        dragon_curve(t, order-1, size, 90)
        t.right(turn)
        dragon_curve(t, order-1, size, -90)
# Устанавливаем стартовую позицию черепахи
t.penup()
t.goto(-300, 0)
t.pendown()
# Вызываем функцию для рисования кривой Хартера-Хейтуэя с заданным
порядком
dragon_curve(t, 10, 10, 90)
# Скрыть черепаху и показать окно
t.hideturtle()
turtle.done()
```

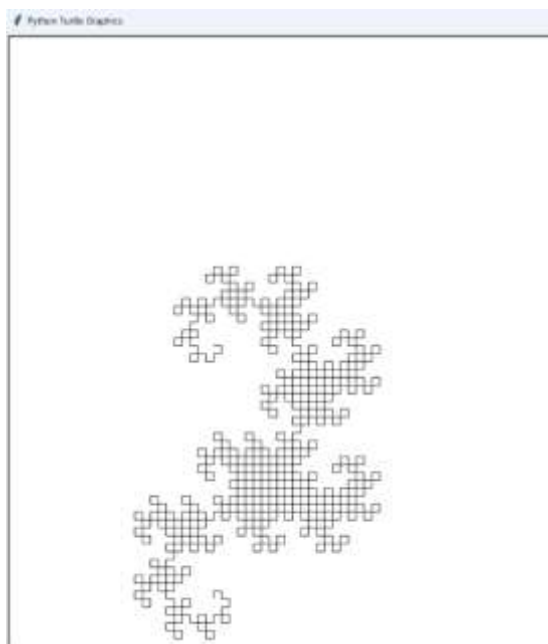


Рисунок 12– Кривая Хартера-Хейтуэя на Python

```
import turtle
def draw_triangle(points, color, my_turtle):
    my_turtle.fillcolor(color)
    my_turtle.up()
    my_turtle.goto(points[0][0], points[0][1])
    my_turtle.down()
    my_turtle.begin_fill()
    my_turtle.goto(points[1][0], points[1][1])
    my_turtle.goto(points[2][0], points[2][1])
    my_turtle.goto(points[0][0], points[0][1])
    my_turtle.end_fill()
def get_mid(p1, p2):
    return ((p1[0]+p2[0])/2, (p1[1]+p2[1])/2)
def sierpinski(points, degree, my_turtle):
    colormap = ['blue', 'red', 'green', 'white', 'yellow',
                'violet', 'orange']
    draw_triangle(points, colormap[degree], my_turtle)
    if degree > 0:
        sierpinski([points[0],
                     get_mid(points[0], points[1]),
                     get_mid(points[0], points[2])],
                    degree-1, my_turtle)
        sierpinski([points[1],
                     get_mid(points[0], points[1]),
                     get_mid(points[1], points[2])],
                    degree-1, my_turtle)
        sierpinski([points[2],
                     get_mid(points[2], points[1]),
                     get_mid(points[0], points[2])],
                    degree-1, my_turtle)
def main():
    my_turtle = turtle.Turtle()
    my_win = turtle.Screen()
    my_points = [[-100, -50], [0, 100], [100, -50]]
    sierpinski(my_points, 3, my_turtle)
    my_win.exitonclick()
main()
```

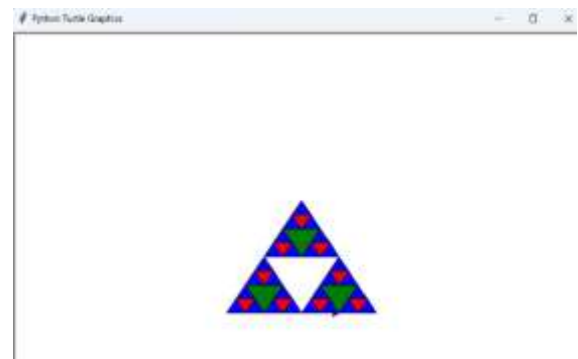


Рисунок 13– Треугольник Серпинского на Python

